次の微分方程式を解け。

(1) $$y'' + \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$

(2) $$y' = \cos^2(x)\cos^2(y)$$

(3) $$y' + y\sin(x) = e^{\cos(x)},\ y(0) = 0$$

(4) $$y' + \frac{2}{x}y = \sin(x)$$

(5) $$xy' = y + x\cot^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

(1) $$y'' + \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$

$$y'' + \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$

$$y' = -\tan(x) + c_1 \quad (c_1\text{: 積分定数})$$

$$y = \log|\cos(x)| + c_1 x + c_2 \quad (c_2\text{ :積分定数})$$

$$\left(\because \int \tan(x) dx = \int \frac{-\cos'(x)}{\cos(x)} dx = -\log|\cos x| \right)$$

(2) $y' = \cos^2(x)\cos^2(y)$

i) $\cos(y) = 0$の時,

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k:\text{定数})$$

ii) $\cos(y) \neq 0$,つまり$\mathrm{y} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ の時,

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \frac{dy}{\cos^2(y)} = \cos^2(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \tan(y) + C_1 = \int \cos^2(x)\,dx \quad (C_1:\text{積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \tan(y) + C_1 = \int \frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \tan(y) + C_1 = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \arctan\left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C_2\right) \quad (C_2 = -C_1)$$

(3) $y' + y\sin(x) = e^{\cos(x)}$

$y' + p(x)y = q(x)$　非同次1階線形常微分方程式　・・・①

一般解: $y = e^{-\int p(x)dx}\left(A + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$

$y = e^{\cos(x)}(x + A)$

初期条件 $y(0) = 0$ より, $A = 0$

よって, $y = xe^{\cos(x)}$

*)補足　一般解: $y=e^{-\int p(x)dx}\left(A+\int q\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx\right)$　の導出方法

同次1階線形常微分方程式（$q\left(x\right)=0$である①式）を解くと，

$$y'+p(x)y=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \log\left|y\right|=-\int p(x)dx$$

$$\Leftrightarrow y=Ae^{-\int p(x)dx}$$

よって，①式の一般解は以下のようにおける．

$$y=A(x)e^{-\int p(x)dx} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

これを①式に代入すると，

$$A'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow A(x)=A+\int q\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx \quad (A\text{:積分定数})$$

となり，②式に代入することで一般解が求まる．

(4)　$y' + \frac{2}{x} y = \sin\left(x\right)$

$y' + p\left(x\right) y = q\left(x\right)$　非同次１階線形常微分方程式

(3)と同様に同次式を解くと，　$y = C\frac{1}{x^2}$

よって，与式の一般解は　$y = C(x)\frac{1}{x^2}$

与式に代入すると，

$C'(x) = x^2 \sin(x) \Leftrightarrow -x^2 \cos\left(x\right) + 2x\sin\left(x\right) + 2\cos\left(x\right) + A$　（Aは任意定数）

以上より，解は

$$y = \frac{1}{x^2}\left(-x^2 \cos\left(x\right) + 2x\sin\left(x\right) + 2\cos\left(x\right) + A\right)$$　（Aは任意定数）

(5) $xy' = y + x\cot^2\left(\frac{y}{x}\right)$

従属変数変換を行う． $y = ux$とおくと, $y' = u + xu'$

与式に代入して,

$$y' = \frac{y}{x} + \ \cot^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow u + xu' = u + \ \cot^2(u) \Leftrightarrow \cot^2(u) = xu'$$

$$\Leftrightarrow \tan^2(u)\,du = \frac{dx}{x} \ \Leftrightarrow \int \tan^2(u)\,du = \ln|x| + C \qquad (C:\text{積分定数})$$

ここで,

$$\int \tan^2(u)\,du = \int \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}du = \int \frac{1-\cos^2(u)}{\cos^2(u)}du = \int \frac{1}{\cos^2(u)}du - \int du = \tan u - u$$

したがって,

$$\tan u - u = \ln|x| + C \qquad (\text{陰関数表示})$$