次の微分方程式を解け。

(1) $e^{y}dx + \left(xe^{y} - 1\right)dy = 0$

(2) $y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 0$

(3) $xy' - 2y = x^{3}y^{2}$ （ベルヌーイの微分方程式）

(1)　$e^{y}dx+\left(xe^{y}-1\right)dy=0$

$$\begin{cases} P\left(x,y\right)=e^{y} \\ Q\left(x,y\right)=xe^{y}-1 \end{cases}$$ とおくと，$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$　と表せる．

ここで,

(＊) $$\begin{cases} \dfrac{\partial P\left(x,y\right)}{\partial y}=e^{y} \\ \dfrac{\partial Q\left(x,y\right)}{\partial x}=e^{y} \end{cases}$$ より，$\dfrac{\partial P\left(x,y\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q\left(x,y\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial^{2}\phi\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}$　と置くと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P\left(x,y\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial^{2}\phi\left(x,y\right)}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial Q\left(x,y\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial^{2}\phi\left(x,y\right)}{\partial x\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(x,y\right)=\dfrac{\partial\phi\left(x,y\right)}{\partial x} \\ Q\left(x,y\right)=\dfrac{\partial\phi\left(x,y\right)}{\partial y} \end{cases}$$

$d\phi\left(x,y\right)=\dfrac{\partial\phi\left(x,y\right)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\phi\left(x,y\right)}{\partial y}dy$　なので,

$d\phi\left(x,y\right)=P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$

$\therefore\phi\left(x,y\right)=C_{1}$　（C_{1}：任意定数）・・・①

次のページへ

(1)の続き

このように(*)の条件が成立するものを完全微分形といい,

解は上記のように表される.

以下$\phi\left(x,y\right)$について解く.

$$\phi\left(x,y\right)=\int P\left(x,y\right)dx=xe^{y}+R\left(y\right)$$

この式をyについて偏微分すると,

$$\frac{\partial\phi\left(x,y\right)}{\partial y}=xe^{y}+R'(y)$$

$$\frac{\partial\phi\left(x,y\right)}{\partial y}=Q\left(x,y\right)=xe^{y}-1$$ より,

$R'(y)=-1\Leftrightarrow R(y)=-y+C_2$　（C_2:任意定数）

$$\therefore\phi\left(x,y\right)=xe^{y}-y+C_2$$

①より

$$xe^{y}-y+C_2=C_1$$

$\Leftrightarrow xe^{y}-y=C$　（C:任意定数）

(2)　$y'' - 6y' + 9y = 0$　　$y(0) = 1, y'(0) = 0$

定数係数2階線形常微分方程式

特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

特性方程式の解 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (重解)

よって，一般解は $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$より、

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 3C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

よって、$y = e^{3x} - 3xe^{3x}$

(3)　$xy'-2y=x^3y^2$

ベルヌーイの微分方程式　$y'+p(x)y=g(x)y^{\alpha}$　・・・①

従属変数変換　$u=y^{1-\alpha}$　とおくと,

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

①を代入して,

$$u'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\left(g(x)y^{\alpha}-p(x)y\right)=(1-\alpha)\left(g(x)-p(x)y^{1-\alpha}\right)$$

$$\therefore u'=(1-\alpha)\left(g(x)-p(x)u\right)\Leftrightarrow u'+(1-\alpha)p(x)u=(1-\alpha)g(x)$$

uに関する次の1階線形微分方程式が得られる

これを(3)の問題に当てはめると, $\alpha=2$　$p(x)=-\dfrac{2}{x}$　$g(x)=x^2$　$u=\dfrac{1}{y}$

$u'+\dfrac{2}{x}u=-x^2$　・・・②

次のページへ

(3)の続き

積分因子$e^{\int \frac{2}{x}dx}$（$= e^{\log x^2} = x^2$）を②の両辺にかける

$$x^2 u' + 2xu = -x^4$$

左辺は$x^2 u$の導関数なので,

$$\frac{d(x^2 u)}{dx} = -x^4 \Leftrightarrow x^2 u = -\frac{x^5}{5} + C_1 \qquad （C_1\text{:任意定数}）$$

よって，②の解は，$u = -\dfrac{x^3}{5} + \dfrac{C_1}{x^2}$

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{-\dfrac{x^3}{5} + \dfrac{C_1}{x^2}} = \frac{5x^2}{-x^5 + 5C_1}$$

$$\therefore y = \frac{5x^2}{-x^5 + C} \qquad （C\text{:任意定数}）$$