次の微分方程式を解け.

(1) $y'' + 4y' + 4y = \sin^2 x + e^{-2x}$

(2) $y''' + y'' - 2y = 0;\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

(1)　$y'' + 4y' + 4y = \sin^2 x + e^{-2x}$

同次方程式の一般解を求める

$y = e^{\lambda x}$　を代入し、λ の固有方程式$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$を解くと

重解$\lambda = -2$が得られる

よって同次方程式の一般解は $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \cdots$①

特殊解を求める

$$y'' + 4y' + 4y = \sin^2 x + e^{-2x} \Leftrightarrow y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + e^{-2x}$$

$y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{2}$に$y = A$を代入すると

$$4A = \frac{1}{2} \therefore A = \frac{1}{8}$$

$y'' + 4y' + 4y = -\dfrac{\cos 2x}{2}$に$y = B\cos(2x) + C\sin(2x)$を代入すると

$$8C\cos(2x) - 8B\sin(2x) = -\frac{\cos 2x}{2}$$

$$\therefore B = 0, C = -\frac{1}{16}$$

$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$に$y = Dx^2 e^{-2x}$を代入すると

$$2De^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\therefore D = \frac{1}{2}$$

よって特殊解は、

$$y = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sin\left(2x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x} \cdots ②$$

①,②より一般解は

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sin\left(2x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$$

(2) $y''' + y'' - 2y = 0;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

三次線形微分方程式

$y = e^{\lambda x}$ を代入し、λ の固有方程式$\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$を解くと

$\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$より

解$\lambda = 1, -1 \pm i$が得られる

λ=1より$y = C_1 e^x$

$\lambda = -1 \pm i$ より $y = C_2 e^{(-1+i)x} + C_3 e^{(-1-i)x} = e^{-x}(C_2{}' \cos(x) + C_3{}' \sin(x))$

よって一般解 は$y = C_1 e^x + e^{-x}(C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x))$

$$y' = C_1 e^{x} - e^{-x}\left\{\left(C_2 - C_3\right)\cos\left(x\right) + \left(C_2 + C_3\right)\sin\left(x\right)\right\}$$

$$y'' = C_1 e^{x} - e^{-x}\left(2C_3 \cos\left(x\right) - 2C_2 \sin\left(x\right)\right)$$

初期条件を用いて、

$$\begin{cases} y\left(0\right) = 1 \\ y'\left(0\right) = 0 \\ y''\left(0\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 - 2C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2/5 \\ C_2 = 3/5 \\ C_3 = 1/5 \end{cases}$$

よって解は $y = \dfrac{2}{5}e^{x} + e^{-x}\left(\dfrac{3}{5}\cos\left(x\right) + \dfrac{1}{5}\sin\left(x\right)\right)$