次の微分方程式を解け。

(1) $$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

(2) $$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

(3) $$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{t}$$

(4) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

(5) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) $\quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$とおいて，定数係数連立線形常微分方程式を考える．

・Aの固有値を求める．

$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y} = 0$

特性方程式$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ (重解)

・$\lambda = -1$のときの固有ベクトル $\quad \mathbf{y}^{(\mathbf{1})} = [y_1 \quad \mathrm{y}_2]^T$は，

$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{y}^{(\mathbf{1})} = 0 \Leftrightarrow y_1 = \mathrm{y}_2$

$y_1 = 1$ 　とおくと，$\mathbf{y}^{(\mathbf{1})} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1つ目の解 $c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 　が得られる．

・２つ目の解は，$c_2 e^{-t}\left(t\mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{y}^{(2)}\right)$

このとき$\mathbf{y}^{(2)}$ は $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{y}^{(1)}$を満たす$\Leftrightarrow -y_1 + \mathrm{y}_2 = 1$

$y_2 = 0$ 　とおくと，$\mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

よって，２つ目の解は　$c_2 e^{-t}\left(t\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} t-1 \\ t \end{bmatrix}$

$\therefore \mathbf{y} = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} t-1 \\ t \end{bmatrix}$

(2) $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t}$ ・・・①

同次方程式 $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$

$\mathbf{y}$が2個（n次ならn個）の1次独立な固有ベクトル$\mathbf{y}^{(1)}$，$\mathbf{y}^{(2)}$を持つ$\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ は対角化可能 $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$・・・②

ただし，$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} & \mathbf{y}^{(2)} \end{bmatrix}$ （λ_1，λ_2: 固有値）

・固有値を求める　$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

固有ベクトル: $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y} = 0$について解き, $\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{y}$は2個の1次独立な固有ベクトルを持つので，$\mathbf{A}$は対角化可能．よって，

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

変数変換 $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ より①式は

$$\mathbf{P}\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} \Leftrightarrow \mathbf{z}' = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} \quad (\because ②)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} \quad ・・・③$$

次のページへ

(2)の続き

$$③ \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 - e^{2t} \\ z_2' = 3z_2 + 2e^{2t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = c_1 e^t - e^{2t} \\ z_2 = c_2 e^{3t} - 2e^{2t} \end{cases}$$ （c_1，c_2:任意定数）　※導出方法は下に記載

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

よって，$\mathbf{y} = \mathbf{Pz} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(※)$\begin{cases} z_1' = z_1 - e^{2t} \\ z_2' = 3z_2 + 2e^{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = c_1 e^t - e^{2t} \\ z_2 = c_2 e^{3t} - 2e^{2t} \end{cases}$　の導出

$z_1' = z_1 - e^{2t} \Leftrightarrow z_1' - z_1 = -e^{2t}$

両辺に$e^{\int -1dt}(= e^{-t})$ をかける．

$e^{-t} z_1' - e^{-t} z_1 = -e^t \Leftrightarrow (e^{-t} z_1)' = -e^t \Leftrightarrow e^{-t} z_1 = -e^t + c_1$　（c_1:任意定数）

$\therefore z_1 = c_1 e^t - e^{2t}$

$z_2' = 3z_2 + 2e^{2t} \Leftrightarrow z_2' - 3z_2 = 2e^{2t}$

両辺に$e^{\int -3dt}(= e^{-3t})$ をかける．

$e^{-3t} z_2' - 3e^{-3t} z_2 = 2e^{-t} \Leftrightarrow (e^{-3t} z_2)' = 2e^{-t} \Leftrightarrow e^{-3t} z_2 = -2e^{-t} + c_2$　（c_2:任意定数）

$\therefore z_2 = c_2 e^{3t} - 2e^{2t}$

(3) $y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t$

同次方程式 $y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y \Leftrightarrow y' = Ay$

yが2個（n次ならn個）の1次独立な固有ベクトルを持つ$\Rightarrow$ Aは対角化可能 $D = P^{-1}AP$

ここで，$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，$P = \begin{bmatrix} y^{(1)} & y^{(2)} \end{bmatrix}$

固有値 : $\mathrm{y} = \mathrm{Ay}$が成立するyが存在する条件 $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

固有ベクトル : $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\mathrm{y} = 0$について解き, $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

yは2個の1次独立な固有ベクトルを持つので，Aは対角化可能．よって，

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

変数変換 $z = P^{-1} y$ より $z' = Dz + P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t$

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 - e^t \\ z_2' = 3z_2 + 2e^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = c_1 e^t - te^t \\ z_2 = c_2 e^{3t} - e^t \end{cases}$$

$$y = Pz = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -t-1 \\ t-1 \end{bmatrix}$$

(4) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}-t^2\\ 2t\end{bmatrix}$$

a) 同次方程式の一般解を求める

$\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}$ の特性方程式を解いて

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \quad \text{（重解）}$$

$\lambda=2$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}^{(1)}$ は

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}^{(1)}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1=-x_2$$

$x_1=1$　とおくと，$\mathbf{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

よって一つの解は　　$C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$　（C_1 : 任意定数）

もう一つの解は

$C_2e^{2t}\left(t\,\mathbf{x}^{(1)}+\mathbf{u}\right)$　ここで$\mathbf{u}$は$\left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}\right)\mathbf{u}=\mathbf{x}^{(1)}$　を満たす　（C_2 : 任意定数）

$\mathbf{u}$を求めると

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{x}^{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow u_1+u_2=-1$$

$u_2=0$　とおくと，$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$

よって同次方程式の一般解は

$$\mathbf{x}^{(h)}=C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+C_2e^{2t}\left(t\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow \mathbf{x}^{(h)}=C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+C_2e^{2t}\begin{bmatrix}t-1\\ -t\end{bmatrix}$$

b) 特解を求める

特解の候補として$\mathbf{x}^{(\mathrm{p})}=\begin{bmatrix} at^2+bt+c \\ dt^2+et+f \end{bmatrix}$を代入

$$\frac{d\mathbf{x}^{(\mathrm{p})}}{dt}=\begin{bmatrix} 2at+b \\ 2dt+e \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{x}^{(\mathrm{p})}}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}^{(\mathrm{p})}+\begin{bmatrix} -t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

から,

$$\begin{bmatrix} 2at+b \\ 2dt+e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} at^2+bt+c \\ dt^2+et+f \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -t^2 \\ 2t \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3/4 \\ b=1/2 \\ c=1/8 \\ d=-1/4 \\ e=-1 \\ f=-3/8 \end{cases}$$

特解　$\mathbf{x}^{(\mathrm{p})}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}t^2-t-\frac{3}{8} \end{bmatrix}$　を得る

よって非同次方程式の一般解は

$$\mathbf{x}=C_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+C_2e^{2t}\begin{bmatrix} t-1 \\ -t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}t^2-t-\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

(5) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}e^{2t}\\0\\0\end{bmatrix}$$

a) 同次方程式の一般解を求める

$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}\mathbf{x}$ の特性方程式を解いて

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&1-\lambda&-2\\3&2&1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right)\Leftrightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=1+2j,\lambda_3=1-2j$$

$\lambda_1=1$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}^{(1)}$ は

$$\begin{bmatrix}1-\lambda_1&0&0\\2&1-\lambda_1&-2\\3&2&1-\lambda_1\end{bmatrix}\mathbf{x}^{(1)}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\3x_1=-2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\mathbf{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}\qquad(\because x_1=2\text{とおいた})$$

$\lambda_{2,3}=1\pm2j$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}^{(2,3)}$ は

$$\begin{bmatrix}1-\lambda_{2,3}&0&0\\2&1-\lambda_{2,3}&-2\\3&2&1-\lambda_{2,3}\end{bmatrix}\mathbf{x}^{(2,3)}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mp2j&0&0\\2&\mp2j&-2\\3&2&\mp2j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\mp2jx_1=0\\2x_1\mp2jx_2-2x_3=0\Leftrightarrow\mathbf{x}^{(2,3)}=\begin{bmatrix}0\\1\\\mp j\end{bmatrix}\\3x_1+2x_2\mp2jx_3=0\end{cases}\qquad(\because x_2=1\text{とおいた})$$

よって同次方程式の一般解は

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{h})}=C_1e^t\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}+A_1e^{(1+2j)t}\begin{bmatrix}0\\1\\-j\end{bmatrix}+A_2e^{(1-2j)t}\begin{bmatrix}0\\1\\+j\end{bmatrix}=C_1e^t\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}+\left(A_1+A_2\right)e^t\begin{bmatrix}0\\\cos(2t)\\\sin(2t)\end{bmatrix}+j\left(A_1-A_2\right)e^t\begin{bmatrix}0\\\sin(2t)\\-\cos(2t)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{h})}=C_1e^t\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}+C_2e^t\begin{bmatrix}0\\\cos(2t)\\\sin(2t)\end{bmatrix}+C_3e^t\begin{bmatrix}0\\\sin(2t)\\-\cos(2t)\end{bmatrix}\qquad(C_1,\ C_2,\ C_3\text{:任意定数})$$

b) 特解を求める

特解の候補として $\mathbf{x}^{(\mathbf{p})} = e^{2t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を代入すると

$$\frac{d\mathbf{x}^{(\mathbf{p})}}{dt} = 2e^{2t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{x}^{(\mathbf{p})}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}^{(\mathbf{p})} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ を解いて

$$2e^{2t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4/5 \\ x_1 = 7/5 \end{cases}$$

特解 $\mathbf{x}^{(\mathbf{p})} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$ を得る

よって非同次方程式の一般解は

$$\mathbf{x} = C_1 e^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix} + C_3 e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$