1. 平衡点を分類し、軌道の概形を描け.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - 1 \\ \dot{y} = 2x - y + 5 \end{cases}$$

2. y_1, y_2 に関する次の連立微分方程式について,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 4y_1 - 4y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 \end{cases}$$

(2.1) 一般解を求めよ.

(2.2) 平衡点(0, 0)の周りの安定性を論ぜよ.

3. 次の微分方程式を解け.

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$$ （オイラー型方程式）

(1) $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - 1 \\ \dot{y} = 2x - y + 5 \end{cases}$

$\begin{cases} -x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$を解くと

$x = -2, y = 1$

点$(-2,1)$は平衡点になる

$\begin{cases} u = x + 2 \\ v = y - 1 \end{cases}$とおくと

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - 1 \\ \dot{y} = 2x - y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = -u - v \\ \dot{v} = 2u - v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$とおくと

$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$

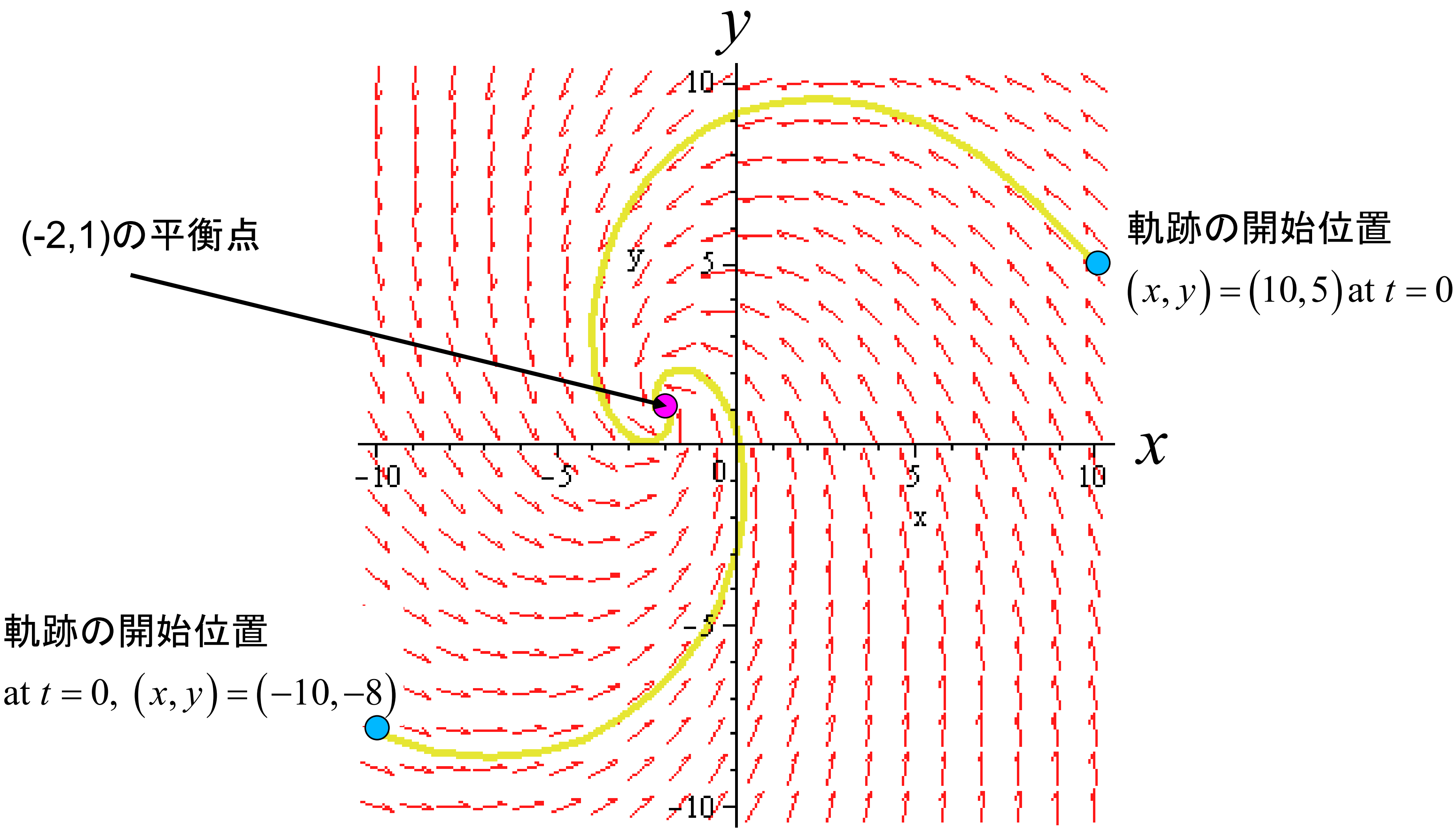
固有値λの固有方程式は$\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{u}=0$より

特性方程式$\det\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=-1\pm j\sqrt{2}$

よって共役複素数解の実数部が負なので、

安定かつ漸近安定な渦状点



y
x
10
5
-5
-10
0
(-2,1)の平衡点
軌跡の開始位置
$(x, y) = (10, 5)$ at $t = 0$
軌跡の開始位置
at $t = 0$, $(x, y) = (-10, -8)$

(2)$\begin{cases} \dot{y}_1 = 4y_1 - 4y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 \end{cases}$

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$とおくと

$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$

(2.1) λの固有方程式は$\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{y} = 0$より

特性方程式$\det\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$(重解)

固有値$\lambda = 2$に対する固有ベクトルは

$\left(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_1 - 2y_2 = 0$

この解として一つ選び，$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

また

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}^{(1)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_1 - 2y_2 = 1$$

この解として一つ選び，$\boldsymbol{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって一般解は

$$\boldsymbol{y} = e^{tA}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{(1)} & \boldsymbol{y}^{(2)} \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{c}' = e^{2t}\left\{ C_1 \boldsymbol{y}^{(1)} + C_2\left(t\boldsymbol{y}^{(1)} + \boldsymbol{y}^{(2)}\right) \right\}$$

(2.2)平衡点(0,0)周りでは、固有値が重解をもつため不安定.

(3) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

$y = x^m$ を代入すると

$\left(m^2 + 3m + 2\right)x^2 = 0$

$m^2 + 3m + 2 = 0$ は解 $m = -2,\ -1$ を持つ

基本解は $y_1 = x^{-2},\ y_2 = x^{-1}$

よって一般解は $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$

(別解)

$x=e^t$とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$とすると求める微分方程式は

$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=0$となる

$y=e^{\lambda t}$を代入すると，λの固有方程式は$\lambda^2+3\lambda+2=0$となり

$\lambda=-2,-1$を解に持つ

よって一般解は$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

$\therefore y=C_1x^{-1}+C_2x^{-2}$